

Fraktale in Theorie und Anwendung

*Wolken sind keine Kugeln, Berge keine Kegel, Küstenlinien keine Kreise.
Die Rinde ist nicht glatt - und auch der Blitz bahnt
sich seinen Weg nicht gerade. [...]
Die Existenz solcher Formen fordert uns zum Studium dessen heraus,
was Euklid als formlos beiseite lässt,
führt uns zur Morphologie des Amorphen.
Mandelbrot, Die fraktale Geometrie der Natur*

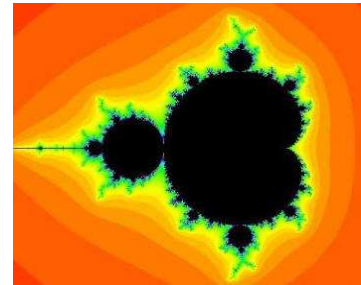


Abbildung 1: Mandelbrotmenge

Oft spricht man pauschal von der „Schönheit von Fraktalen“. Viele kennen die ansprechenden bunten Bilder der Mandelbrotmenge (Abbildung 1) oder anderer Fraktale. Bis zu einem bestimmten Grad ist es sicher möglich, die Schönheit von fraktalen Objekten ohne oder nur mit geringen Mathematikkenntnissen wertzuschätzen. Der Kurs unternimmt jedoch darüber hinaus den Versuch, durch ein Studium der fraktalen Mathematik einen tieferen Einblick in die Schönheit der Fraktale zu ermöglichen.

Fraktale

Der Begriff Fraktal wurde vor etwa 25 Jahren von Benoît B. Mandelbrot geprägt. Im Kurs werden verschiedene mögliche Definitionen vorgestellt. Allen Fraktalen ist eine Reihe von charakteristischen Eigenschaften gemein - eine von ihnen ist die Selbstähnlichkeit.

Man nennt ein geometrisches Objekt selbstähnlich, wenn bei einer Vergrößerung ein Teil in das ursprüngliche Ganze und bei einer Verkleinerung das Ganze in eines seiner ursprünglichen Teile übergeht.

Ein Beispiel für ein Fraktal, bei dem man diese Selbstähnlichkeit beobachten kann, ist die Kochsche Schneeflockenkurve (Abbildung 2). Sie wird wie folgt konstruiert: Man beginnt mit einem

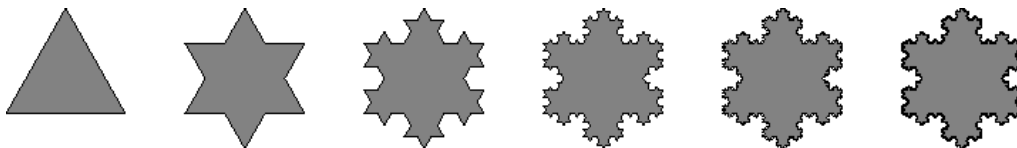


Abbildung 2: Konstruktion der Kochschen Schneeflockenkurve

gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge 1. Anschließend teilt man die Seiten jeweils in drei gleichlange Teilstrecken, errichtet auf der mittleren jeweils ein kleineres gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge $1/3$ und entfernt die zu dem ursprünglichen Dreieck gehörende Linie. Wie in der Abbildung angegeben, führt man diese Konstruktion immer wieder durch. Man erhält so die selbstähnliche Kochsche Schneeflockenkurve.

Eine weitere charakteristische Eigenschaft von Fraktalen ist ihre gebrochene Dimension. Aus der euklidischen Geometrie kennt man nur Objekte ganzzahliger Dimensionen. Eine Gerade z.B. hat Dimension 1, eine Fläche Dimension 2. Die einfachste Definition von Dimension ist die topologische Dimension, die, unserer Intuition gemäß, stets ganzzahlig ist.

Diese Definition wird der komplizierten Struktur von Fraktalen nicht gerecht. So kann eine Kurve, die die topologische Dimension 1 hat, durchaus einen positiven Flächeninhalt haben. Solche Phänomene werden durch eine alternative Definition der Dimension abgedeckt, die der Mathematiker Felix Hausdorff zu Beginn des letzten Jahrhunderts einführte. Nach dieser Definition ist es möglich, dass ein Objekt eine gebrochene bzw. nicht ganzzahlige Dimension besitzt, wie etwa das Sierpinski-Dreieck (Abbildung 3), dessen Hausdorffdimension z.B. gerade $(\log 2 / \log 3)$ ist,

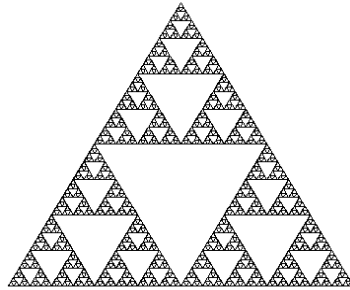


Abbildung 3: Sierpinski Dreieck

oder die Kochsche Schneeflockenkurve. Aus dieser Eigenschaft leitet sich der Begriff Fraktal (lat. fractum = gebrochen) ab.

Im Kurs werden verschiedene Dimensionsbegriffe vorgestellt und Methoden zur Dimensionsberechnung erarbeitet.

Juliamengen

Die bekanntesten Bilder von Fraktalen sind wohl die von Juliamengen (Abbildung 4) oder die der Mandelbrotmenge. Diese Objekte beruhen auf der Iteration gewisser Funktionen von komplexen Zahlen. Unter der Iteration einer Funktion f versteht man das Betrachten der Folge $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x)))...$. Selbst im Falle einfachster Funktionen können dabei unerwartete Dinge passieren.

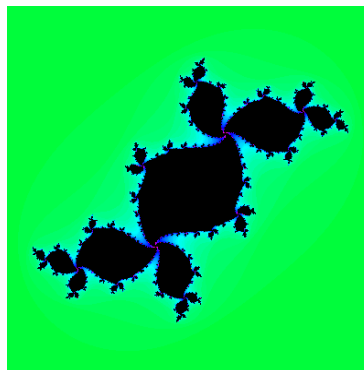


Abbildung 4: Juliamenge

Die Juliamengen beispielsweise, die eine höchst komplizierte Struktur aufweisen, werden von einer sehr einfachen Familie von komplexwertigen Funktionen erzeugt: den quadratischen Polynomen $f(z)=z^2+c$. Die Juliamenge repräsentiert dabei den Bereich, auf dem sich diese Funktionen bei Iteration chaotisch verhalten. Die zugrundeliegende Funktionenfamilie ist noch immer Gegenstand aktueller Forschung.

Diese Mengen weisen wiederum das Symptom der Selbstähnlichkeit auf. Ihre Struktur lässt sich hervorragend auch im (Computer-) Experiment erforschen und hat auch abseits der Mathematik durch ihre Ästhetik Aufmerksamkeit auf sich gezogen.

Anwendungen und Beispiele

Am Himmel ziehende Wolken, Börsenschwankungen, das Straßennetz einer Großstadt, die menschlichen Blutgefäße - so unterschiedlich diese Gebilde auch sind, sie alle lassen sich mit den mathematischen Konzepten beschreiben, die in der Theorie der Fraktale entwickelt werden. Eine große Rolle werden Wachstumsprozesse spielen, die in ihrer Vielfalt genauer untersucht werden sollen. Schwerpunkte bei der Wahl der Beispiele können im Verlauf der Akademie je nach den Interessen der Teilnehmer gesetzt werden.

Kursarbeit

In einem ersten Arbeitsschritt wird im Kurs die Theorie der Fraktale auf einer mathematisch präzisen Grundlage erarbeitet und anschließend an exemplarischen Phänomenen aus den Bereichen der Physik, Biologie und Wirtschaft verdeutlicht. Nach einer Einführung in das Gebiet ist die Diskussion des Stoffs im Rahmen von Gruppenarbeit und Einzelvorträgen der Teilnehmenden geplant. Für Kurzreferate können auch schon vor Beginn der Akademie Referatsthemen je nach Interessens- und Kenntnislage der Teilnehmenden vergeben werden. Die Kursleiter werden sich dazu rechtzeitig vor Kursbeginn mit den Teilnehmenden in Verbindung setzen.

Teilnahmevoraussetzungen

Für den Kurs wird es sehr hilfreich sein, die Grundlagen der Differentialrechnung (Kurvendiskussionen, Grenzprozesse, Folgen und Reihen) zu kennen. Wer über Grundwissen im Bereich der komplexen Zahlen verfügt, dem wird sich dieses im Kurs sicherlich als sehr nützlich erweisen. Diese Kenntnisse sind aber keinesfalls notwendig, denn die benötigten Konzepte werden im Kurs erarbeitet.

An verschiedenen Stellen wird der Kurs die Gelegenheit bieten, die betrachteten Objekte am Computer zu erzeugen und zu studieren. Der Hauptteil des Kurses wird jedoch keine elektronischen Hilfsmittel benötigen und ist für Teilnehmende ohne Computerkenntnisse ebenso angebracht wie für diejenigen, die über solche verfügen.

Viel wichtiger als all dies ist aber der Spaß an Mathematik, abstraktem Denken und daran, sich den Kopf zu zerbrechen.

Kurshomepage

Aktuelle Informationen und Materialien zum Kurs lassen sich unter der Adresse

<http://www.BjoernMuenstermann.de/Fraktale>

im Internet finden.

Kursleiter

Björn Münstermann (Jg. 1976), begann sein Studium der Mathematik, Informatik und Betriebswirtschaftslehre an der Georg-August-Universität in Göttingen. Während eines Auslandsjahres setzte er es am Laboratoire Dieudonne in Nizza, Frankreich, fort. Derzeit schreibt er seine Diplomarbeit in den Bereichen Homologische Algebra und Lie Algebren an der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg. Dort, sowie zuvor in Göttingen, betreut er regelmäßig Übungsgruppen zu Vorlesungen der mathematischen Fakultät. Außerhalb der Uni spielt er Gitarre, reist gerne und ist leidenschaftlicher Mountainbiker im Freiburger Umland.

Christina Diehl (Jg. 1978), studiert Mathematik, Physik und Englisch an der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg. Nach Abschluß des Part III an der Universität Cambridge schreibt sie nun in Freiburg an ihrer Diplomarbeit im Bereich Zahlentheorie. Dort betreut sie auch regelmäßig Übungsgruppen. Neben der Uni lernt sie gerne Sprachen, schreibt, schwimmt, spielt Klavier und ist begeisterte Kinogängerin.