

Mögliche Vortragsthemen

Im folgenden findet ihr eine Auflistung möglicher Vortragsthemen, die ihr im Kurs vorstellen könnt. Jeder Teilnehmende soll für ein Thema verantwortlich sein. Bitte schaut diese Übersicht durch und prüft, ob ihr einen Themenkomplex ausmachen könnt, zu dem Ihr gerne einen Vortrag halten möchtet. Solltet ihr gerne zu einem hier nicht genannten Thema, welches natürlich in den Gesamtkomplex passen sollte, einen Vortrag halten wollen, so schreibt uns dies ebenfalls, mit Nennung Eures Themenwunsches. Bitte gebt neben einem Hauptvortragswunsch mindestens einen, besser zwei Alternativwünsche an. Es müssen dabei natürlich nicht alle Vorträge aus demselben Themenbereich stammen.

A) Fraktale und Dimensionsbegriffe

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit verschiedenen Dimensionsbegriffen, die wir jeweils an fraktalen Gebilden untersuchen wollen. Ein geometrisches Objekt kann verschiedene Dimensionen besitzen. Aus der Schule bekannt ist die euklidische Dimension (ein Punkt hat euklidische Dimension 0, eine Kurve euklidische Dimension 1, eine Fläche euklidische Dimension 2, usw.). Wir werden darüber hinaus die Selbstähnlichkeitsdimension, topologische Dimension und Hausdorffdimension kennen lernen. Die verschiedenen Dimensionen werden für einzelne Objekte berechnet und untersucht, bei welchen Objekten die verschiedenen Dimensionen übereinstimmen und wo sich Unterschiede ergeben.

1. Selbstähnlichkeitsdimension

Grob gesagt ist ein geometrische Gebilde selbstähnlich, wenn Teile des Gebildes (eventuell nach einer entsprechenden Vergrößerung) mit dem Gesamtgebilde identisch sind. In dem Vortrag soll diese anschauliche Formulierung mathematisch erfaßt werden. Selbstähnlichen Gebilden kann man eine Selbstähnlichkeitsdimension zuordnen, welche in dem Vortrag vorgestellt wird.

2. Euklidische und algebraische Dimension, metrische Räume

Es werden die euklidische Dimension und die topologische Dimension für geometrische Gebilde vorgestellt. Anschließend soll ein wichtiger mathematischer Begriff eingeführt werden: der metrische Raum. Aus der Schule kennt man reelle Vektorräume (\mathbb{R} , \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 ...), auf denen ein Abstandsbegriff definiert ist (Abstand von Punkt x zu Punkt $y = |x-y|$). Dieses Konzept lässt sich verallgemeinern. Man untersucht Vektorräume, auf denen man einen Abstandsbegriff (eine Metrik) definieren kann.

3. Topologische Räume, topologische Dimension, fraktale Dimension

Im vorigen Vortrag wurden die metrischen Räume vorgestellt. Was aber ist mit Vektorräumen, auf denen kein Abstandsbegriff definiert werden kann? Es zeigt sich, dass man mit dem Konzept der Topologie viele Begriffe aus metrischen Räumen auch auf andere Räume übertragen kann (z.B. Offenheit von Mengen, Konvergenz, u.ä.). Anschließend sollen die topologische und die fraktale Dimension von geometrischen Gebilden vorgestellt werden.

4. Hausdorff-Dimension

Ein schwierigerer Dimensionsbegriff, der für die fraktale Geometrie jedoch eine entscheidende Rolle spielt, ist der der Hausdorff-Dimension. In dem Vortrag soll die Definition vorgestellt werden, eventuell einige Sätze, und die Hausdorff-Dimension für konkrete Gebilde berechnet werden.

B) Iteration

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Iteration von Funktionen (oder auch Punktfolgen). Die Iteration ist ein wichtiger Begriff für die fraktale Geometrie. Viele fraktale Gebilde, z.B. Die Koch-Kurve oder das Sierpinski-Dreieck, lassen sich am besten durch die iterativen Prozesse beschreiben, mit deren Hilfe das Gebilde konstruiert wird. Es wäre ungleich schwerer, das Gebilde 'direkt' anzugeben, d.h. Für jeden Punkt einzeln anzugeben, ob er zu dem Gebilde gehört oder nicht.

5. Iteration im Reellen

Anhand der Iteration im reellen Fall sollen wichtige Begriffe wie Fixpunkt, Attraktor, periodischer Punkt, Einzugsbereich usw. vorgestellt werden.

6. Die logistische Familie - das Feigenbaumdiagramm

Die logistische Familie, stellt ein einfaches Modell für z.B. Populationsentwicklung unter beschränkten Ressourcen dar. Das Wachstum von Populationen weckte stets das Interesse von Biologen, Ökologen, Epidemiologen - und auch von Mathematikern. Hinter den täuschend einfachen Formeln des Populationswachstums lauert nämlich ein vielfältiges und abwechslungsreiches Verhalten, das von einfachsten Strukturen bis zum Fraktal reicht. Das Ziel dieses Vortrags ist es, diese Familie ein wenig zu erforschen - sowohl experimentell als auch mathematisch.

7. Komplexe Zahlen

Ziel dieses Vortrages soll die Einführung der komplexen Zahlen sein. An einigen Beispielen könnte zunächst motiviert werden, wozu die komplexen Zahlen benötigt werden. Anschließend sollen verschiedene Darstellungen der komplexen Zahlen, z.B. durch Koordinaten oder Radius und Winkel, vorgestellt werden. Ein deutlicher Schwerpunkt sollte anschließend auf dem Rechnen mit komplexen Zahlen liegen. Hierbei ist es jeweils wünschenswert, wenn auch die geometrische Interpretation der Rechenoperation deutlich wird. Für die sich anschließende Iteration im Komplexen wird die komplexe Betragsfunktion benötigt, die hier ebenfalls einzuführen ist.

8. Iteration im Komplexen

In diesem Vortrag werden grundlegende Konzepte der Iteration im Komplexen erörtert. Nachdem die komplexen Zahlen vorgestellt wurden, soll nun die Iteration im Reellen auf den komplexen Fall übertragen werden, wobei einige der reellen Konzepte direkt übernommen werden können. Besonders wichtig ist dabei die geometrische Anschauung in der komplexen Zahlenebene.

C) Mandelbrot- und Juliamengen

Dies ist der bei weitem bunteste Themenkomplex. Hier tauchen viele mathematisch tief liegende Konzepte auf, und wir werden einige Dinge nur anschaulich motivieren, nicht aber formal beweisen können. Im folgenden beschäftigen uns stets mit der Iteration von (komplexen) Polynomen.

9. Die Mandelbrotmenge

Die Mandelbrotmenge ist der wohl berühmteste Vertreter der fraktalen Geometrie. Viele Menschen - Mathematiker und vor allem aber auch Nicht-Mathematiker - sind vom ästhetischen Reiz dieser Figur fasziniert. Ziel des Vortrages soll sein, zunächst die Mandelbrotmenge mittels verschiedener Definitionen vorzustellen und anschließend einige ihrer Eigenschaften zu untersuchen. Uns drängt sich hierbei die Frage auf, in wieweit und welche Eigenschaften der Mandelbrotmenge wir auch mathematisch beweisen können.

10. Die Juliamenge

Ein grundlegendes Konzept der komplexen Dynamik ist die so genannte Juliamenge. Der Vortrag wird die Juliamenge, wieder mittels verschiedener Definitionen, einführen und verschiedene ihrer Eigenschaften unter die Lupe nehmen.

11. Zusammenhang von Juliamengen

Ziel dieses Vortrages soll sein, Kriterien dafür anzugeben, wann genau die Juliamenge zusammenhängend ist und wann nicht.

12. Zusammenhänge zwischen der Mandelbrotmenge und der Juliamenge

In diesem Vortrag sollen enge Zusammenhänge zwischen der Mandelbrotmenge und der Juliamenge im Mittelpunkt stehen. Es lässt sich zeigen, daß abhängig von der Wahl des Startparameters für die Iteration der Juliamenge aus der Mandelbrotmenge die zugehörige Juliamenge entweder zusammenhängend oder unzusammenhängend ist. Dieser Zusammenhang wird oft auch zur Definition der Mandelbrotmenge benutzt.

D) Interessant und verspielt

13. Zufällige Fraktale

Fraktale Gebilde ergeben sich häufig aus zufälligen Prozessen. Ein einfachstes Beispiel ist es, bei der Erzeugung von Fraktalen wie der Kochkurve bei den verschiedenen Schritten eine zufällige Entscheidung einzubinden. Man kann dann über die Dimension der entstandenen Objekte mit positiver oder sicherer Wahrscheinlichkeit etwas aussagen. Natürlichere Beispiele von zufälligen Fraktalen sind Perkolationen oder die Brownsche Bewegung. Die Perkolation kann etwa das Versickern von Öl im Boden beschreiben. Die Brownsche Bewegung kann man sich als Bewegung von freischwebenden Partikeln vorstellen und modelliert etwa die Ausbreitung von Gasen oder bestimmte Elektrolyseprozesse.

14. Fraktale Musik

Die Theorie der Fraktale lässt sich für die verschiedensten Dinge benutzen. Unter anderem auch für fraktale Musik. Ziel dieses Vortrages könnte z.B. sein, einige Beispiele fraktaler Musik vorzustellen und jeweils zu erklären, welche Methoden und Konzepte der gehörten Musik zugrunde liegen.

Alle behandelten Gebiete laden besonders zum Computerexperiment ein. Bereits mit sehr geringem Programmieraufwand lassen sich komplexe und teilweise auch schöne Gebilde erzeugen. Es gibt auch viele Programme zum Darstellen von Fraktalen, Julia-Mengen und vielem mehr. Hier ist Mathematik zum Anfassen möglich.